MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Statistische Afdeling
Rapport S 61
door
T.J.Terpstra
en Dr J.Hemelrijk Jr.

Veneuze druk bij de gezonde mens.

Inhoud

1. Inleiding en overzicht.
2. De onderlinge afhankelijkheid van veneuze druk, leeftijd en thorax-diameter.
3. Een methode voor het elimineren van de afhankelijkheid tussen twee grootheden.
   - 3.1 Inleiding
   - 3.2 Experimentele verdelingsfuncties
   - 3.3 De gebruikte correctie-methode
   - 3.4 Definitie voor de mate van afwijking tussen twee experimentele verdelingsfuncties.
4. Berekening van de correctietabellen.
   - 4.1 Invloed van de thorax-correctie op de afhankelijkheid van veneuze druk en leeftijd voor mannen.
   - 4.2 Een correctietabel voor de veneuze druk van mannen.
   - 4.3 Een correctietabel voor de veneuze druk van vrouwen.
   - 4.4 Doeltreffendheid van de correctietabellen.
   - 4.5 Onderzoek, of de correctietabellen voor de veneuze druk de oorspronkelijk bestaande afhankelijkheid van veneuze druk van leeftijd en thorax-diameter opheffen.
   - 4.6 Een tweede manier voor het construeren van correctietabellen voor de veneuze druk.
5. De twee gekozen correctietabellen voor de veneuze druk.

6. Een systematisch verschil in veneuze druk voor mannen en vrouwen met leeftijd boven de zestig jaar.

6.1 Nadere beschouwing van de correctietabellen voor de veneuze druk.
6.2 De mediaan-toets.
6.3 Onderzoek naar een systematisch verschil in veneuze druk voor mannen en vrouwen met leeftijd kleiner dan zestig jaar.
6.4 Onderzoek naar een systematisch verschil in veneuze druk voor alle mannen en vrouwen.

7. Eénzijdige (naar beneden begrensde) betrouwbaarheidsintervallen voor de percentages mannen en vrouwen met een gecorrigeerde veneuze druk tussen -8½ en -4½ cm.

7.1 Inleiding.
7.2 Het berekenen van de aantallen waarnemingen met een veneuze druk tussen -8½ en -4½ cm.
7.3 De bij de verschillende correctietabellen behorende betrouwbaarheidsintervallen.

8. Histogrammen van de ongecorrigeerde en de gecorrigeerde veneuze druk.
9. Samenvatting.
10. Appendix.
Het berekenen van eenzijdige naar beneden begrensde betrouwbaarheidsintervallen voor de percentages mannen en vrouwen, met een veneuze druk tussen -8½ en -4½ cm.

Verder: Memoranda S 47 (M 6), (M15[a]) en (M 18).

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

1. Inleiding en overzicht.

In een reeds eerder door het Mathematisch Centrum verstrekt rapport (Rapport S 36) zijn eenzijdige (naar beneden begrensde) betrouwbaarheidsintervallen berekend voor de percentages gezonde mannen resp. vrouwen, die een veneuze druk tussen -8½ en -4½ cm. bezitten.[1]

Het resultaat van de berekeningen in dit rapport S 36 was, dat behoudens een onbetrouwbaarheid 0.005, minstens 88% van de gezonde mannen een veneuze druk heeft tussen -8½ en -4½ cm.; behoudens een onbetrouwbaarheid 0,1, heeft minstens 91% van de gezonde mannen een veneuze druk tussen -8½ en -4½ cm.

Voor de gezonde vrouwen bedroegen deze percentages resp. 89% en 92%.

Voor de 186 mannen en 166 vrouwen waren behalve veneuze druk, ook leeftijd en thorax-diameter genoteerd. In het voorlopige rapport S 36 is reeds geconstateerd, dat de 3 grootheden, veneuze druk, leeftijd en thorax-diameter, onderling afhankelijk zijn, zodat d de hierboven vermelde uitkomsten niet gelden voor mannen of vrouwen van een bepaalde leeftijd.

Eigenlijk zou men dus voor iedere combinatie van leeftijd en thorax-diameter apart betrouwbaarheidsintervallen voor bovenstaande percentages moeten bepalen; dit is echter niet mogelijk, daar hiervoor te weinig waarnemingen gedaan zijn.

In plaats daarvan hebben wij correctie-tabellen voor de veneuze druk uit het waarnemingsmateriaal afgeleid. Door het toepassen van deze correcties wordt de afhankelijkheid van veneuze druk van leeftijd en thorax-diameter geelimineerd. Daarna zijn uit de gecorrigeerde waarden van de veneuze druk opnieuw eenzijdige betrouwbaarheidsintervallen berekend voor de percentages gezonde mannen resp. vrouwen, waarvoor de gecorrigeerde veneuze druk tussen -8½ en -4½ cm ligt.

---

[1] Ter algemene orientatie zijn de memoranda S 47 (M 6) en (M 18) aan dit rapport toegevoegd.

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

2. De onderlinge afhankelijkheid tussen veneuze druk, leeftijd en thorax-diameter.

De in het voorlopig Rapport S 36 reeds vermelde onderlinge afhankelijkheid tussen veneuze druk, leeftijd en thorax-diameter is aangetoond met behulp van de χ^2-toets voor onafhankelijkheid (zie hiertoe het aan het eind van dit rapport toegevoegde memorandum S 47, M 15[a]).

Deze χ^2-toets wordt toegepast op de grafieken $1^a,\ldots 3^b$, waar resp. veneuze druk en leeftijd en thorax-diameter onderling tegen elkaar uitgezet zijn. De grafieken worden volgens de in het genoemde memorandum aangegeven wijze in vakken verdeeld, welke vakken in de diagrammen door stippellijnen aangeduid zijn. Bij deze toets zijn 3 verticale lijnen gekozen, omdat bij de toegepaste correctiemethode (zie §3, 3.3) het waarnemingsmateriaal steeds in 3 verschillende groepen verdeeld wprdt. We hebben ons beperkt tot het trekken van één horizontale lijn, om in ieder vak een flink aantal waarnemingen te verkrijgen. (Zie Memorandum M 15[a]).

Tenslotte zijn de in onderstaande tabel 1 vermelde χ^2-waarden met bijbehorende overschrijdingskansen k gevonden.

Tabel 1.
Onafhankelijkheidstoetsing van het oorspronkelijke materiaal.

	Veneuze druk, thorax-diam.	Veneuze druk, leeftijd.	Thorax-diam., leeftijd.
Mannen	$\chi^2 = 10.74$ $k = 0.004$	$\chi^2 = 9.04$ $k = 0.01$	$\chi^2 = 10.06$ $k = 0.006$
Vrouwen	$\chi^2 = 16.23$ $k = 0.0003$	$\chi^2 = 25.12$ $k < 0.0001$	$\chi^2 = 36.87$ $k < 0.0001$

Wanneer als significantie-grens $\alpha = 0.05$ wordt genomen, zijn dus alle berekende overschrijdingskansen k significant en mogen we voor ieder der paren grootheden, behoudens een onbetrouwbaarheid ≤ 0.05, tot afhankelijkheid besluiten.

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

3. Een methode voor het elimineren van de afhankelijkheid tussen twee grootheden.

3.1 Inleiding.

Voor het berekenen van de correcties voor de veneuze druk om de afhankelijkheid tussen veneuze druk en leeftijd, resp. veneuze druk en thorax-diameter op te heffen, is het, wegens de geringe nauwkeurigheid van de meting der veneuze druk (men bereikt geen grotere nauwkeurigheid dan ongeveer $\frac{1}{2}$ cm), overbodig een zeer fijne, theorethisch gefundeerde correctie te geven. Bovendien is de toepassing van een dergelijke correctie in de practijk vrij moeizaam. Wij kiezen daarom een vrij grove correctie-methode, die echter voor de doeleinden van het onderzoek voldoende is en snel en gemakkelijk kan worden toegepast.

3.2 Experimentele verdelingsfuncties.

Bij de nog te bespreken correctie-methode wordt gebruik gemaakt van zgn. experimentele verdelingsfuncties. Deze worden op de volgende wijze verkregen:

Onderstellen we dat een variabele grootheid x - die een al of niet continue verdelingsfunctie bezit - bij waarnemingen alleen gehele waarden kan aannemen, b.v. omdat niet met een grotere graad van nauwkeurigheid gemeten kan worden.

De experimentele verdelingsfunctie van x wordt nu bepaald, door voor iedere $x=x_0$ (x_0 doorloopt de gehele getallen) het percentage van het totale aantal waarnemingen te berekenen, waarvoor $x \leqq x_0$ en vervolgens dit percentage tegen x_0 uit te zetten.

Deze experimentele verdelingsfunctie is dus een "trapfunctie", die als maximale waarde, de waarde 1 bezit.

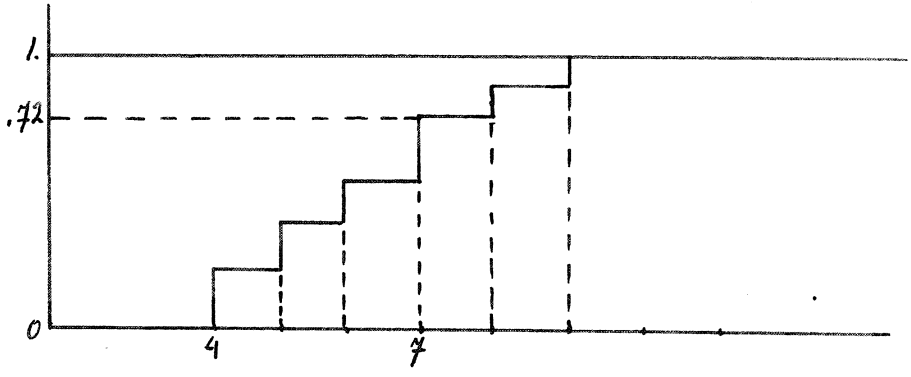


Fig. 1.
Experimentele verdelingsfunctie.

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Wanneer de voor x bepaalde experimentele verdelingsfunctie de in fig. 1 getekende trapfunctie is, dan is dus de betekenis van de bij x=7 behorende waarde 0.74, dat 74% van de waargenomen x-waarden $\leqq 7$ zijn.

3.3 De correctie-methode.

De gebruikte correctie-methode kan het gemakkelijkst besproken worden aan de hand van grafiek 1^a, waar de voor mannen waargenomen waarden van thorax-diameter en veneuze druk tegen elkaar uitgezet zijn.

In § 2 is reeds met behulp van de χ^2-toets aangetoond, dat veneuze druk en thorax-diameter voor mannen sterk afhankelijk zijn.

Om deze afhankelijkheid zo goed mogelijk te elimineren, gaan we nu als volgt te werk:

In grafiek 1^a worden de waarnemingen ingedeeld in groepen, die, wat veneuze druk betreft, elk zoveel mogelijk homogeen zijn. Deze groepen zijn in grafiek 1^a door de getrokken horizontale[1] lijnen aangegeven, dus de groepen met resp. thorax $\leqq 18$[2], $18 < \text{thorax} < 23$ en thorax $\geqq 23$. Trekken we nu nog de verticale getrokken lijn, zodanig, dat links en rechts van deze lijn ongeveer evenveel punten liggen, dan zal de χ^2-toets voor onafhankelijkheid, bij gebruikmaking van de met de getrokken lijnen aangegeven vakken, een zeer kleine overschrijdingskans k geven, daar de horizontale lijnen juist sterk verschillende gebieden van elkaar scheiden. Hierop komen we aan het eind van deze paragraaf nader terug.

Vervolgens worden voor elk van de 3 bovengenoemde groepen waarnemingen de experimentele verdelingsfuncties van de veneuze druk getekend.(Zie grafiek 1^a)

---

1) We denken hierbij de grafieken steeds een kwart slag gedraaid, waardoor de getekende trapfuncties beter tot hun recht komen.

2) In de rest van dit verslag schrijven we kortheidshalve thorax in plaats van thorax-diameter.

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Met behulp van deze trapfuncties worden nu de correcties voor de veneuze druk bepaald, door de bovenste en onderste trapfunctie zo ver horizontaal te verschuiven dat de (in de volgende paragraaf gedefinieerde) mate A van afwijking van de trapfunctie voor de grote middengroep zo klein mogelijk is.

Deze horizontale verschuivingen, uitgedrukt in cm. veneuze druk, worden nu als eerste correctie voor de veneuze druk genomen. Deze correctie is uiteraard afhankelijk van de thorax-diameter; daarom zullen we deze correctie in het vervolg kortweg de thorax-correctie noemen.

Daar de trapfuncties van de 3 meest verschillende groepen waarnemingen getekend zijn, mogen we verwachten dat voor dit correctie-procedé op bovenstaande wijze een efficiente correctie voor het elimineren van de afhankelijkheid tussen veneuze druk en thorax-diameter wordt verkregen.

Opmerking:

De horizontale verschuivingen van de bovenste en onderste trapfunctie kunnen gemakkelijk bepaald worden, door de middelste trapfunctie op doorzichtig papier over te tekenen en deze horizontaal over de bovenste en onderste trapfunctie te verschuiven.

3.4 Definitie van de mate van afwijking A tussen twee experimentele verdelingsfuncties.

Als maat (A) van afwijking tussen twee experimentele verdelingsfuncties nemen we het tussen de twee trapfuncties gelegen oppervlak, hetgeen in ons geval, daar de intervallen de lengte 1 hebben, overeenkomt met de absolute waarde van de algebraische som der verschillen a_i van paren corresponderende waarden van de trapfuncties, dus $A = \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| = |a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n|$

Voorbeeld:

Wanneer de twee trapfuncties, die met elkaar vergeleken worden, de bovenste trapfunctie en de middelste trapfunctie in grafiek 1^a zijn, dan is voor deze 2 trapfuncties de mate van afwijking A= 128 mm. (de afstanden a_i zijn in millimeters uitgedrukt).

In tabel 2 zijn tenslotte de waarden van A gegeven, die bij verschuiving van de middelste trap-

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

functie over de beide andere gevonden worden, waaruit (zie § 3, 3.3) vervolgens de vermelde thorax-correcties voor de veneuze druk worden gevonden.

Tabel 2.

De grootheid A bij mannen voor thorax tegen veneuze druk.

verschuiving[1] middelste trapfunctie over onderste trapfunctie (thorax $\leqq 18$)	A	verschuiving middelste trapfunctie over bovenste trapfunctie (thorax $\geqq 23$)	A
$-\frac{1}{2}$	46	0	107
-1	+40	$\frac{1}{2}$	42
-1	>40	1	>45

[1] De verschuiving is gemeten in cm. veneuze druk.

Een positieve verschuiving wil zeggen, dat de middelste trapfunctie (zie grafiek 1^a) naar rechst verschoven wordt. (steeds is hierbij de grafiek een kwart slag gedraaid gedacht).

Tabel 3.

Thoraxcorrectie bij mannen.

	thorax $\leqq 18$	$18 <$ thorax < 23	thorax $\geqq 23$
thorax-correctie	-1	0	$\frac{1}{2}$

4. Berekening van de Correctie-tabellen.

4.1 Invloed van de thorax-correctie voor mannen.

In § 3 is een thorax-correctie bepaald voor de veneuze druk van mannen.

Het ligt nu voor de hand, allereerst te onderzoeken of deze thorax-correctie misschien, behalve de afhankelijkheid van veneuze druk van thorax-diameter, ook de afhenkelijkheid van veneuze druk van leeftijd elimineert.

Dit bleek inderdaad het geval te zijn, want bij toepassing van de χ^2-toets op de grafiek van thorax en de voor thorax gecorrigeerde veneuze druk en bij toepassing van dezelfde toets op de grafiek van

leeftijd en de voor thorax gecorrigeerde veneuze druk (voor welke correcties we dus tabel 3 gebruiken) vinden we resp. de niet-significante overschrijdingskansen 0.64 en 0.51.

Bij mannen zouden we dus met een thorax-correctie kunnen volstaan ter eliminatie van de afhankelijkheden.

Om echter de afhankelijkheden nog beter op te heffen en tevens, omdat de thorexcorrectie alleen voor de bij vrouwen verrichte waarnemingen niet voldoende bleek (vgl. opmerking bij §4, 4.3), hebben we ook nog een leeftijdscorrectie voor de veneuze druk geconstrueerd.

4.2 Een correctietabel voor veneuze druk van mannen.

Bovengenoemde leeftijdscorrectie voor de veneuze druk wordt op geheel analoge wijze als in § 3, 3.3 bepaald, door weer trapfuncties te tekenen, nu in de grafiek van de voor thorax-diameter gecorrigeerde veneuze druk en de leeftijd en deze trapfuncties weer zover te verschuiven dat ze onderling zo weinig mogelijk afwijken. Deze verschuivingen, uitgedrukt in cm. veneuze druk, zijn dan de bedoelde leeftijdscorrecties.

Door deze leeftijdscorrectie bij de reeds bepaalde thorax-correctie op te tellen, ontstaat de eerste correctie-tabel van bijlage 1.

4.3 Een correctie-tabel voor de veneuze druk van vrouwen.

Op dezelfde wijze is een correctie-tabel voor de veneuze druk van vrouwen bepaald (zie bijlage 1).

Echter zijn de gekozen thorax-grenzen (zo gekozen, dat de verkregen groepen zo veel mogelijk van elkaar afwijken(zie grafiek 1[b])) juist 1 cm kleiner dan die voor mannen.

Dit is in overeenstemming met het feit, dat de mediaan[1] van de thorax-diameter voor vrouwen ook

---

[1] De mediaan is de middelste waarneming, wanneer de waarnemingen naar grootte gerangschikt worden.

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

1 cm kleiner is dan die voor mannen (resp. 19,5 en 20,5), zodat tot dusverre gesproken mag worden van een grote overeenstemming in de aard van de afhankelijkheid van veneuze druk van thorax-diameter bij mannen en vrouwen, hetgeen in de volgende paragrafen nader bevestigd wordt.

Opmerking:

Voor de vrouwen bleek een thorax-correctie alleen niet voldoende. De χ^2-toets voor onafhankelijkheid, toegepast op de grafiek van de voor thorax-diameter gecorrigeerde veneuze druk en leeftijd, gaf namelijk een significante overschrijdingskans k=0.002.

4.4 Doeltreffendheid van de correctie-tabellen.

Van de doeltreffendheid van de correctietabellen van bijlage 1 kan een indruk verkregen worden, door de waarden van de overschrijdingskansen k, die bij toepassing van de χ^2-toets op het gecorrigeerde waarnemingsmateriaal worden gevonden, te vergelijken met de waarden van k voor het overeenkomstige, ongecorrigeerde materiaal. Hoe groter de k wordt, des te minder afhankelijk zijn de 2 grootheden geworden, door het aanbrengen van de correctie.

Bij dit onderzoek naar de doeltreffendheid worden de in de tabellen van bijlage 1 gegeven grenzen voor thorax-diameter en leeftijd gebruikt voor het indelen in vakken ~~van~~ van de verschillende diagrammen, omdat juist deze grenzen de meest verschillende groepen waarnemingen in het oorspronkelijke materiaal scheiden.

De tenslotte gevonden resultaten zijn in de nu volgende tabellen 4^a en 4^b gegeven.

Tabel 4^a

Doeltreffendheid van de correctietabel van bijlage 1 voor mannen.

	Oorspr.mat.	na thorax-correctie	Na thorax- en leeftijdscorr
k_1 [1)]	0.0001	0.44	0.19
k_2	0.005	0.21	0.80

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Tabel 4[b]

Doeltreffendheid van de correctietabel van bijlage 1. voor vrouwen.

	Oorspr.mat.	na thorax-correctie	na thorax- en leeftijdscorr.
k_1	0.011	0.40	0.38
k_2	<0.0001	0.0009	0.22

1) k_1= overschrijdingskans, gevonden bij toepassing van de χ^2-toets op de thorax-veneuze druk-diagrammen.

k_2= overschrijdingskans k, gevonden bij toepassing van de χ^2-toets op de leeftijd-veneuze druk-diagrammen.

4.5 Het toetsen van onafhankelijkheid na correctie van de veneuze druk met behulp van de correctie-tabblien van bijlage 1.

Uit bovenstaande tabellen blijkt, dat de overschrijdingskansen k_1 en k_2 na toepassing van de in bijlage 1 gegeven correcties op de veneuze druk, niet meer significant zijn.

Dit wil echter zonder meer nog niet zeggen, dat na correctie van de veneuze druk met behulp van de correctie-tabellen van bijlage 1 de oorpsronkelijk bestaande afhankelijkheid van veneuze druk van leeftijd en thorax-diameter inderdaad geelimineerd is. Immers, bij de χ^2-toetsen, die op het gecorrigeerde materiaal zijn toegepast, is dezelfde groepindeling gebruikt, als bij het bepalen van de correctie.

Om te toetsen of de correctie-tabellen van bijlage 1 inderdaad voldoende zijn om de oorspronkelijk bestaande afhankelijkheden te elimineren, is het dus noodzakelijk de χ^2-toets voor onafhankelijkheid toe te passen, met groepsindelingen, die onafhankelijk zijn van de voor de correctie gekozen groepsindelingen (zie hiertoe Memorandum S 47, M 15[a]).

Uit de niet-significante waarden voor $k_1$en k_2,die nu bij de in dit memorandum beschreven toets gevonden worden (zie tabel 5), blijkt, dat de correctietabelleh van bijlage 1 inderdaad voldoende zijn, om de oorspronkelijk bestaande afhankelijkheid van veneuze druk van leeftijd en thorax-diameter te elimineren.

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Tabel 5

Onafhankelijkheidstoetsing van het met behulp van de tabellen van bijlage 1 gecorrigeerde materiaal.

	Mannen		Vrouwen	
	Oorspr. materiaal	na thorax- en leeft. cor.	Oorspr. materiaal	na thorax- + leeftcor.
k_1 *)	0.004	0.34	0.0003	0.21
k_2	0.01	0.78	<0.0001	0.34

*) voor de betekenis van k_1 en k_2 zie §4, 4.4 .

Opmerking:

Wanneer één der overschrijdingskansen k_1 en k_2 of beide, na de aangebrachte correctie nog wèl significant geweest zouden zijn, dan hadden we het correctieprocedé op dezelfde wijze kunnen voortzetten.

Het staat echter niet vast, dat met deze methode steeds het beoogde doel bereikt wordt. Indien dat wel het geval is, zoals bij het onderhavige materiaal, is zij echter zeer bruikbaar.

4.6 Een tweede manier voor het construeren van correctietabellen voor de veneuze druk.

De correctietabellen van bijlage 1 zijn gevonden door uit te gaan van de grafieken voor thoraxdiameter en veneuze druk, hieruit een thorax-correctie te bepalen en daarha uit de grafieken van de reeds voor thorax-diameter gecorrigeerde veneuze druk en leeftijd, de leeftijdscorrectie te bepalen.

Echter kunnen we ook de omgekeerde volgorde nemen, dus eerst een leeftijdscorrectie bepalen voor de veneuze druk en daarna, zo nodig, nog een thorax-correctie. Wij vinden dan in de tabellen 7^a en 7^b samengevatte correcties.

Bij deze tweede correctie-methode is een leeftijdscorrectie, zowel voor mannen als vrouwen, reeds voldoende, om de oorspronkelijk bestaande afhankelijkheden te elimineren. Passen we namelijk de, in S47 (M 15^a) beschreven, χ^2-toets toe op de verschillende, met behulp van de leeftijdscorrecties alleen (zie de tabellen 7^a en 7^b) gecorrigeerde grafieken, dan vinden we de volgende, niet significante overschrijdingskansen k.

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Tabel 6

De onafhankelijkheidstoetsing van het voor leeftijd gecorrigeerde materiaal.

	Mannen		Vrouwen	
	Oorspr. materiaal	Na leeftijds-correctie	Oorspr. materiaal	Na leeft.-correctie
k_1 *)	0.004	0.25	0.0003	0.36
k_2	0.01	0.64	$<$0.0001	0.07

*) voor de betekenis van k_1 en k_2 zie § 4, 4.4.

Zowel voor vrouwen als voor mannen, zouden we dus met een leeftijdscorrectie kunnen volstaan. Echter is één der overschrijdingskansen in bovenstaande tabel, ook na de correctie, nog betrekkelijk klein, (0,07). Op grond hiervan en op grond van het feit, dat bij de eerste correctie-methode een leeftijds- en thorax-correctie goede resultaten gaven, zijn ook hier beide correcties berekend en samengevat in de volgende tabellen.

Tabel 7a

2° correctietabel voor de veneuze druk van mannen.

Mannen.		leeftijd	≦19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	≧70
		leeftijds-correctie	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
thorax	thorax-correctie								
≦18	$-\frac{1}{2}$		$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$			-1	
18<th<23	0		-1	$-\frac{1}{2}$	0			$-\frac{1}{2}$	
th≧23	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$			0	

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Tabel 7^b

2^o correctietabel voor de veneuze druk van vrouwen.

leeftijd	≤19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	≥70
leeftijds-correctie	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1

thorax	thorax-correctie						
17	$-\frac{1}{2}$		$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
17 th 22	0		-1	$-\frac{1}{2}$	0		1
22	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		$1\frac{1}{2}$

Deze twee correctietabellen elimineren weer op zeer bevredigende wijze de oorspronkelijk bestaande afhankelijkheden, hetgeen blijkt, uit de niet significante overschrijdingskansen k, die gevonden worden bij toepassing van de in S 47 (M 15) beschreven χ^2-toets op met behulp van bovenstaande tabellen gecorrigeerde grafieken. Deze overschrijdingskansen zijn de volgende:

Tabel 8

Onafhankelijkheidstoetsing van het met behulp van de tabellen 7^a en 7^b gecorrigeerde materiaal.

	Mannen		Vrouwen	
	Oorspr. materiaal	Na leeft. en thorax-corr.	Oorspr. materiaal	Na leeft. en thorax- corr.
k_1	0.004	0.72	0.0003	0.72
k_2	0.01	0.42	<0.0001	0.14

Omtrent de doelmatigheid van deze tweede correctie-methode, kan men weer een indruk krijgen, door de overschrijdingskansen k te berekenen, behorende bij de χ^2-toetsen, toegepast op de met behulp van de correctie-tabellen 7^a en 7^b gecorrigeerde grafieken, waarbij de vakindelingen van de grafieken bepaald wordt door de waarden van thorax-diameter en leeftijd, die in de oorspronkelijke grafieken de meest verschillende groepen scheidden.

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Deze overschrijdingskansen k zijn de volgende:

Tabel 9

Doelmatigheid van de correctietabellen 7^a en 7^b.

Mannen	Oorspr. materiaal	na leeftijds-correctie	na leeftijds- en thorax-correctie
k_1	0.0001	0.003	0.94
k_2	0.005	0.20	0.25

Vrouwen	Oorspr. materiaal	na leeftijds-correctie	na leeftijds- en thorax-correctie
k_1	0.011	0.20	>0.95
k_2	0.0001	0.13	0.09

5. De twee gekozen correctie-tabellen voor de veneuze druk.

In § 4 zijn op twee verschillende manieren (zowel voor mannen als voor vrouwen) correctietabellen afgeleid voor de veneuze druk, die de afhankelijkheid van veneuze druk van thorax-diameter en leeftijd in het oorspronkelijk materiaal elimineren.

Uit deze twee paren correctietabellen (de 2 tabellen van bijlage 1 en de tabellen 6^a en 6^b) willen we nu het voor ons doel meest geschikte tweetal kiezen. Dit zullen nu die twee tabellen zijn, (n.l. één voor mannen en één voor vrouwen) die zowel de afhankelijkheid van veneuze druk van thorax-diameter, als de afhankelijkheid van veneuze druk van leeftijd gelijktijdig zo goed mogelijk elimineren.

Als maatstaf voor de keuze van dit tweetal correctie-tabellen gebruiken we de overschrijdingskansen k (na correctie) uit de tabellen 5 en 8, en uit de doelmatigheidstabellen 4^a, 4^b en 9 (laatste kolommen).

We kiezen dan dat tweetal correctietabellen, waarvoor onder deze overschrijdingskansen zo weinig mogelijk kleine voorkomen. Immers deze zouden wijzen op een slechts gebrekkig geëlimineerde afhankelijkheid.

Daar nu in tabel 8 de betrekkelijk kleine overschrijdingskans k=0.14 voor komt, en in tabel 9 de kleine waarde 0.09, zijn tenslotte de met tabel 5 corresponderende correctietabellen, d.w.z. de cor-

rectietabellen van bijlage 1, als de meest geschikte gekozen.

Opmerking.

De tenslotte gekozen correctie-tabellen voor de veneuze druk (zie bijlage 1) zijn bepaald uit het aan ons verstrekte waarnemings materiaal en dienen derhalve als geschatte correcties te worden beschouwd, zodat toetsing van toekomstige waarnemingen en eventueel een dienovereenkomstige wijziging der correcties gewenst is. Dit laatste zou alleen nodig zijn, indien mocht blijken, dat bij latere waarnemingen de afhankelijkheden ondanks de correcties, toch zouden blijven bestaan.

Volgens de hierboven beschreven methode kan dan opnieuw een (verbeterde) correctietabel worden bepaald.

6. Een systematisch verschil in veneuze druk voor mannen en vrouwen met leeftijd boven 60 jaar.

6.1 Nadere beschouwing van de correctietabellen.

Wanneer we de correctietabellen van bijlage 1 aan een nader onderzoek onderwerpen, dan blijkt, dat de thorax-correctie voor mannen en vrouwen, afgezien van het verschil in thorax-indeling, dezelfde is.

De leeftijdscorrectie voor mannen en vrouwen met leeftijd kleiner dan 60 jaar is ook dezelfde, maar boven deze leeftijd verschillen ze systematisch en wel zodanig, dat de vrouwen een grotere correctie voor de veneuze druk krijgen, dan de mannen.

6.2 De mediaantoets.

Naar aanleiding hiervan hebben wij de veneuze druk voor mannen boven de 60 jaar vergeleken met die voor vrouwen boven de 60, en evenzo xmax de veneuze druk voor beide groepen beneden de 60 jaar. Daar hieronder zeer veel gelijke waarnemingen optraden, werd gebruik gemaakt van een toets, die voor discrete verdelingen geschikt is, n.l. de mediaantoets[1],

---

[1] Voor de theorie en gebruiksaanwijzing van deze toets verwijzen we naar de dissertatie van J.Hemelrijk: "Symmetrietoetsen en andere toepassingen van de theorie van Neyman en Pearson", den Haag, 1950, hoofdstuk 2.

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Hierbij wordt de hypothese getoetst, dat de veneuze druk van mannen uit één der leeftijdsgroepen, dezelfde verdelingsfunctie bezit als de veneuze druk van vrouwen uit dezelfde leeftijdsgroep.

Bij toepassing van deze mediaantoets op de waarnemingen van de veneuze druk voor mannen en vrouwen van 60 jaar en ouder, werd een significante overschrijdingskans 0,026 gevonden, waarbij de vrouwen een regelmatig kleinere veneuze druk bezitten dan de mannen.

6.3 Onderzoek naar een systematisch verschil in veneuze druk voor mannen en vrouwen met leeftijd kleiner dan zestig jaar.

Voor de waarnemingen uit de leeftijdsgroep beneden 60 jaar, werd een oversdhrijdingskans 0.049 gevonden, waarbij de vrouwen nu een regelmatig grotere veneuze druk vertonen dan de mannen.

6.4 Onderzoek naar een systematisch verschil in veneuze druk voor alle mannen en vrouwen.

De mediaantoets, toegepast op alle waarnemingen voor veneuze druk van mannen en vrouwen, leverde een overschrijdingskans 0.41, zodat hieruit alleen niet tot een systematisch verschil in veneuze druk voor mannen en vrouwen besloten mag worden.

De hierboven vermelde resultaten samen kunnen we echter als een sterke aanwijzing beschouwen, dat bij toenemende leeftijd, de veneuze druk voor vrouwen afneemt, terwijl die voor mannen boven de zestig jaar weer gaat toenemen. Schematisch kunnen we deze afhankelijkheid van veneuze druk van leeftijd voor mannen en vrouwen als volgt voorstellen:

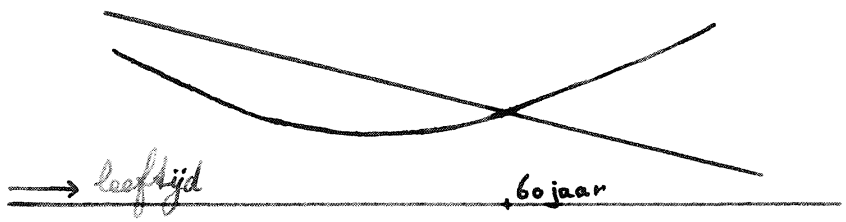


fig. 2

Schematische afhankelijkheid van veneuze druk van leeftijd voor mannen en vrouwen.

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Opmerking:

Aan de hierboven berekende overschrijdingskansen kunnen we niet teveel waarde hechten, daar de gebruikte toets (en in het bijzonder de keuze van het punt "60" jaar als scheidingspunt) naar aanleiding van de aard van de correctietabellen dus uit de ons verstrekte waarnemingen gekozen zijn. Dit heeft ten gevolge dat de werkelijke onbetrouwbaarheid van de toets groter is dan de hierboven berekende overschrijdingskansen. We kunnen dus slechts spreken van een vrij sterke aanwijzing in de richting van het geschetste gedrag van de veneuze druk. Contrôle door middel van nieuwe waarnemingen zal dit verschijnsel moeten bevestigen (of weerleggen).

7. Betrouwbaarheidsintervallen voor de percentages mannen en vrouwen met een gecorrigeerde veneuze druk tussen -8½ en -4½ cm.

7.1 Inleiding.

Nu de verschillende correctietabellen geconstrueerd zijn, kunnen we overgaan tot het berekenen van nieuwe eenzijdige, naar beneden begrensde betrouwbaarheidsintervallen voor de percentages mannen en vrouwen met een gecorrigeerde veneuze druk tussen -8½ en -4½ cm.[1)]

Het berekenen van deze betrouwbaarheidsintervallen geschiedt volgens de in de Appendix aangegeven methode, waaruit blijkt, dat de betrouwbaarheidsintervallen bepaald worden door de uitgebreidheid n van de steekproef, het aantal waarnemingen van de steekproef, die buiten het interval (-8½, -4½) cm. liggen (aangegeven door de letter f) en de toegelaten onbetrouwbaarheid α.

7.2 Het berekenen van de grootheid f.

In het algemeen bedragen de meetfouten van de veneuze druk niet meer dan een ½ cm. Om deze reden hebben we de waarnemingen gegroepeerd in intervallen van 1 cm: -3½ tot -4½ cm, -4½ tot -5½,..., -9½ tot -10½ cm.

De waarde van de grootheid g, die het aantal waarnemingen van de steekproef aangeeft met een veneuze druk, kleiner dan -8½ of groter dan -4½ cm, wordt nu volkomen bepaald door de afspraak, een waarneming

1) Vgl. voor het begrip betrouwbaarheidsinterval memorandum S47 (M 18).

geheel tot een interval te rekenen, wanneer hij er binnen ligt en voor de helft tot het ene interval en voor de helft tot een aangrenzende interval, wanneer hij op de grens ligt van twee intervallen.

7.3 De bij de verschillende correctietabellen berekende betrouwbaarheidsintervallen.

Wanneer de veneuze druk voor mannen en die voor vrouwen met behulp van de correctietabellen van bijlage 1 gecorrigeerd worden, dan vinden we de in onderstaande tabel 10 gegeven waarden voor n en f waaruit (zie § 7, 7.1 en de appendix) bij gegeven onbetrouwbaarheidsdrempel α [1] de in de rechterkolommen van tabel 10 vermelde eenzijdige, naar beneden begrensde betrouwbaarheidsintervallen gevonden worden voor de percentages mannen resp. vrouwen met een gecorrigeerde veneuze druk tussen -8½ en -4½ cm.

Eveneens zijn de uitkomsten vermeld, die gevonden worden na correctie van de veneuze druk met behulp van de tabellen 7^a en 7^b.

Tenslotte zijn ter vergelijking de in het Rapport S 36 afgeleverde, niet-exacte betrouwbaarheidsintervallen vermeld.

Tabel 10

Betrouwbaarheidsintervallen voor de percentages mannen met een veneuze druk tussen -8½ en -4½ cm.

Toegepaste correctie	n	f	α =0.005	α=0.025	α =01
geen	186	10	> 88%	) 90%	> 91%
bijlage 1	165	5½	>91%	)93%	> 94%
tabel 7	165	6	>90%	> 92%	)93%

[1] Voor α=0,005, α=0.025 en α=0.1 zijn tabellen en nomogrammen ter bepaling van het gewenste betrouwbaarheidsinterval beschikbaar. Daarom hebben wij ons tot deze waarde beperkt. (Zie R.A.Fisher and F.Yates, Statistical Tables, London 1949, p. 48)

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Betrouwbaarheidsintervallen voor de percentages vrouwen met een veneuze druk tussen -8½ en -4½ cm.

Toegepaste correctie	n	f	α=0.005	α=0.025	α=0.1
geen	166	8	> 89%	> 90%	> 92%
bijlage 1	144	5	> 90%	> 92%	> 93%
tabel 7	144	4½	> 91%	> 93%	> 94%

Uit voorgaande tabel 10 blijkt, dat de benedengrenzen van de eenzijdige betrouwbaarheidsintervallen voor de percentages waarnemingen met een veneuze druk tussen -8½ en -4½ cm, na correctie van de veneuze druk, zowel voor mannen als voor vrouwen, groter zijn dan vòòr de correctie.

In § 8 wordt uiteengezet, dat dit resultaat op theoretische gronden ook is te verwachten.

Explicatie van tabel 9.

De resultaten in tabel 9 vermeld, dienen alsvolgt geïnterpreteerd te worden:

Wanneer bij volgende waarnemingen de correctietabellen van bijlage 1 gebruikt worden voor het corrigeren van de veneuze druk, dan zullen, behoudens een onbetrouwbaarheid 0.005, minstens 91% van de gecorrigeerde nieuwe waarnemingen voor mannen tussen -4½ en -8½ cm komen te liggen en minstens 90% van de gecorrigeerde nieuwe waarnemingen voor vrouwen in dit interval.

Bij een onbetrouwbaarheid 0.1, zijn deze percentages resp. 91% en 94%, etc. Men kan er dus vrijwel zeker op rekenen, dat het aantal gezonde mannen en vrouwen, waarvan de veneuze druk ligt tussen -4½ en -8½ cm, dicht in de buurt van de 90% of hoger ligt. Dit geldt echter, strikt genomen, slechts voor die groep van de bevolking, waaraan her waarnemingsmateriaal ontleend is.

8. De histogrammen van de gecorrigeerde en de ongecorrigeerde veneuze druk.

De histogrammen van de gecorrigeerde en ongecorrigeerde veneuze druk worden verkregen, door de percentages waarnemingen met een al dan niet gecorrigeerde veneuze druk tussen -3½ en -4½, -4½ en -5½, ...,-9½ en -10½ cm te berekenen en deze tegen de

intervallen uit te zetten. (Voor het berekenen van de aantallen waarnemingen, liggende in zeker interval, verwijzen we naar § 7, 7.2).

Deze histogrammen (zie grafiek 4) zijn berekend voor de met behulp van de tabellen van bijlage 1 gecorrigeerde waarnemingen van de veneuze druk en voor de met behulp van de tabellen 7^a en 7^b gecorrigeerde waarnemingen (steeds voor mannen en vrouwen apart).

Vergelijken we nu deze histogrammen met die van de ongecorrigeerde veneuze druk, dan blijkt de massa van de histogrammen van de gecorrigeerde veneuze druk meer in het midden geconcentreerd zijn. Bovendien bezitten de histogrammen na correctie meer de gedaante van de normale verdeling; de scheefheid is aanmerkelijk verminderd.

De grotere massaconcentratie naar het midden van de histogrammen is echter ook te verwachten, want door het aanbrengen van de gegeven correcties op de veneuze druk, wordt de afhankelijkheid van veneuze druk van leeftijd en thorax-diameter zo goed mogelijk geelimineerd en bezit de veneuze druk dus na correctie een kleine spreiding.

Opmerking:

Een gevolg van de grotere massaconcentratie naar het midden van de histogrammen van de veneuze druk, is, dat de benedengrenzen van de berekende eenzijdige betrouwbaarheidsintervallen voor de percentages mannen met een veneuze druk tussen -8½ en -4½ cm, na correctie van de veneuze druk, groter zijn dan voor de correctie.

9. Samenvatting.

a. De afhankelijkheid tussen veneuze druk en leeftijd resp. thorax-diameter, kan opgeheven worden door toepassing van de in bijlage 1 samengevatte correcties.

b. In tabel 10 vindt men naar onderen begrensde betrouwbaarheidsintervallen voor de percentages der gecorrigeerde waarden der veneuze druk bij gezonde mannen en vrouwen, die tussen -8½ en -4½ liggen. Men kan grofweg zeggen, dat dit percentage in de buurt van de 90% of hoger ligt.

c. Er is een aanwijzing, dat de invloed van de leeftijd op de veneuze druk bij mannen en vrouwen

verschillend is en wel zodanig, dat bij beide onder de 60 jaar de veneuze druk daalt bij stijgende leeftijd, terwijl deze daling bij de vrouwen boven de 60 jaar voortgezet wordt, maar bij de mannnen in een stijging overgaat.

De mannen beneden de 60 jaar vertoonden een lagere veneuze druk dan de vrouwen en die boven de 60 jaar een hogere dan de vrouwen van dezelfde groep. Dit verschijnsel dient echter nader bevestigd (of weerlegd) te worden. Een pertinente uitspraak hierover kan op grond van het gegegeven materiaal niet gedaan worden.

10. Appendix

We onderstellen, dat in den steekproef van de uitgebreidheid n, f waarnemingen buiten het interval $-3/2$, $-4/2$ cm liggen, zodat er n-f binnen dit interval liggen.

Veronderstel, dat in de collectie, waaruit men de steekproeg getrokken denkt, een fractie p buiten het interval en dus een fractie q=1-p binnen het interval ligt.

Dan is, onder bovengenoemde veronderstelling omtrent de collectie, de kans dat $f' \leq f$ waarnemingen buiten het interval liggen bij een steekproef ter grootte n, gelijk aan

$$\sum_{k=0}^{f} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1 - I_p(f+1, n-f),$$

waarbij I de onvolledige Beta-functie vorstelt in de notatie van K.Pearson (zie b.v. K.Pearson, Tables of the incomplete Beta-function, Cambridge 1934).

Bij de gegeven steekproef nemen n en f bepaalde waarden aan. Om nu een eenzijdig, naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval voor q=1-p te berekenen (met onbetrouwbaarheidsdrempel α), worden al die waarden q=1-p verworpen, waarvoor

$$\sum_{k=0}^{f} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1 - I_p(f+1, n-f) \leq \alpha. \qquad (1)$$

Hieraan voldoen alle waarden van p, die groter zijn dan een zekere vaste waarde p_0, zodat $q \geq 1-p_0$ een eenzijdige naar beneden begrensde betrouwbaarheidsinterval voor q is met onbetrouwbaarheidsdrempel α.

Bij de berekeningen is gebruik gemaakt van de nomogrammen van L.E.Simon's "An engineers' Manual of statistical methods", New York 1945 en "Statistical Tables" van Fisher en Yates.London '49 pag 48.

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Bijlage 1.

Correctietabel voor veneuze druk.

Mannen.

leeftijd	≦19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	≧70
leeftijds-correctie	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

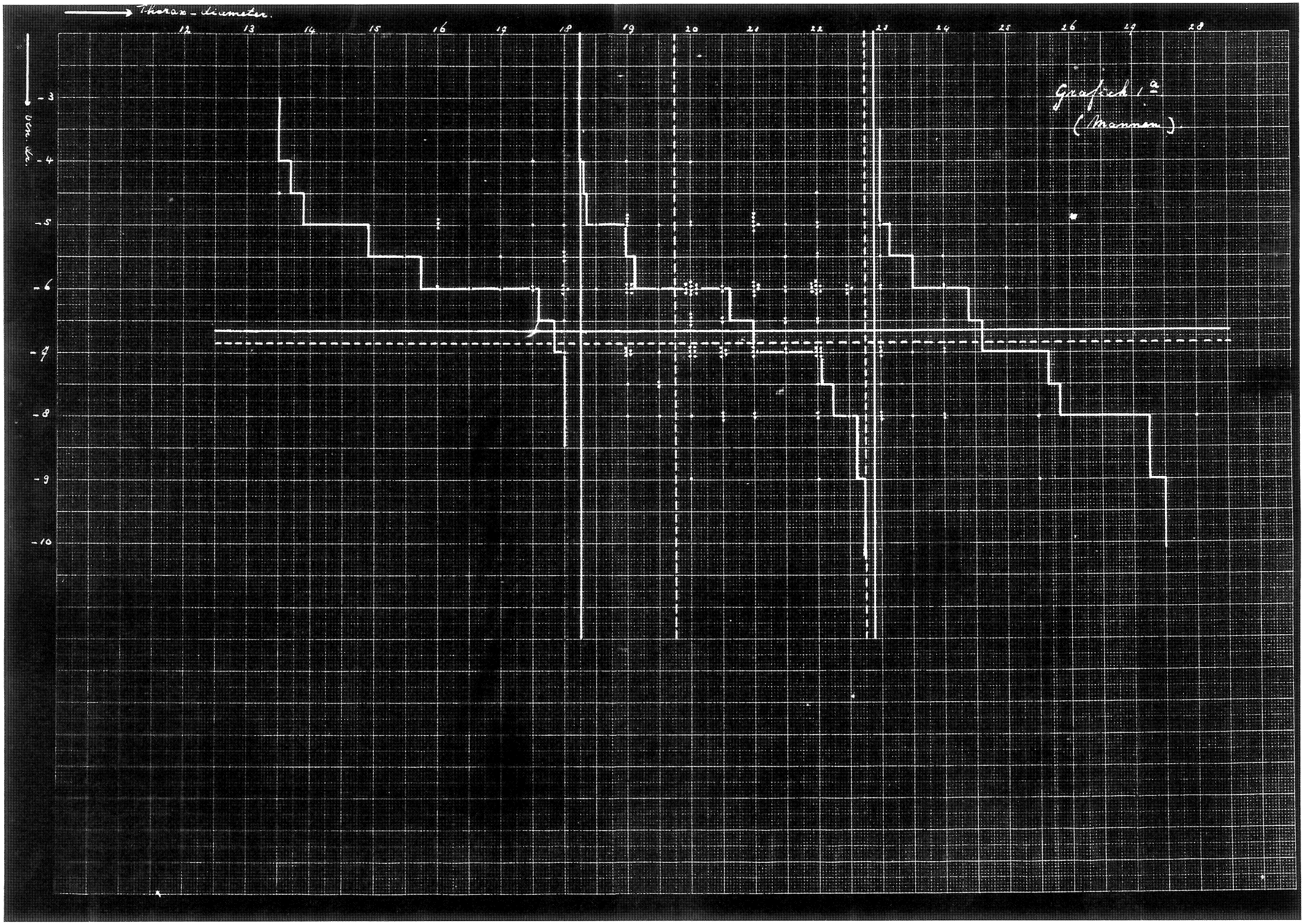
thorax	thorax-correctie	leeftijd ≦19	leeftijd 20-29 … 50-59	leeftijd 60-69 … ≧70
≦18	-1	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-1\frac{1}{2}$
18 < th < 23	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
th ≧ 23	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

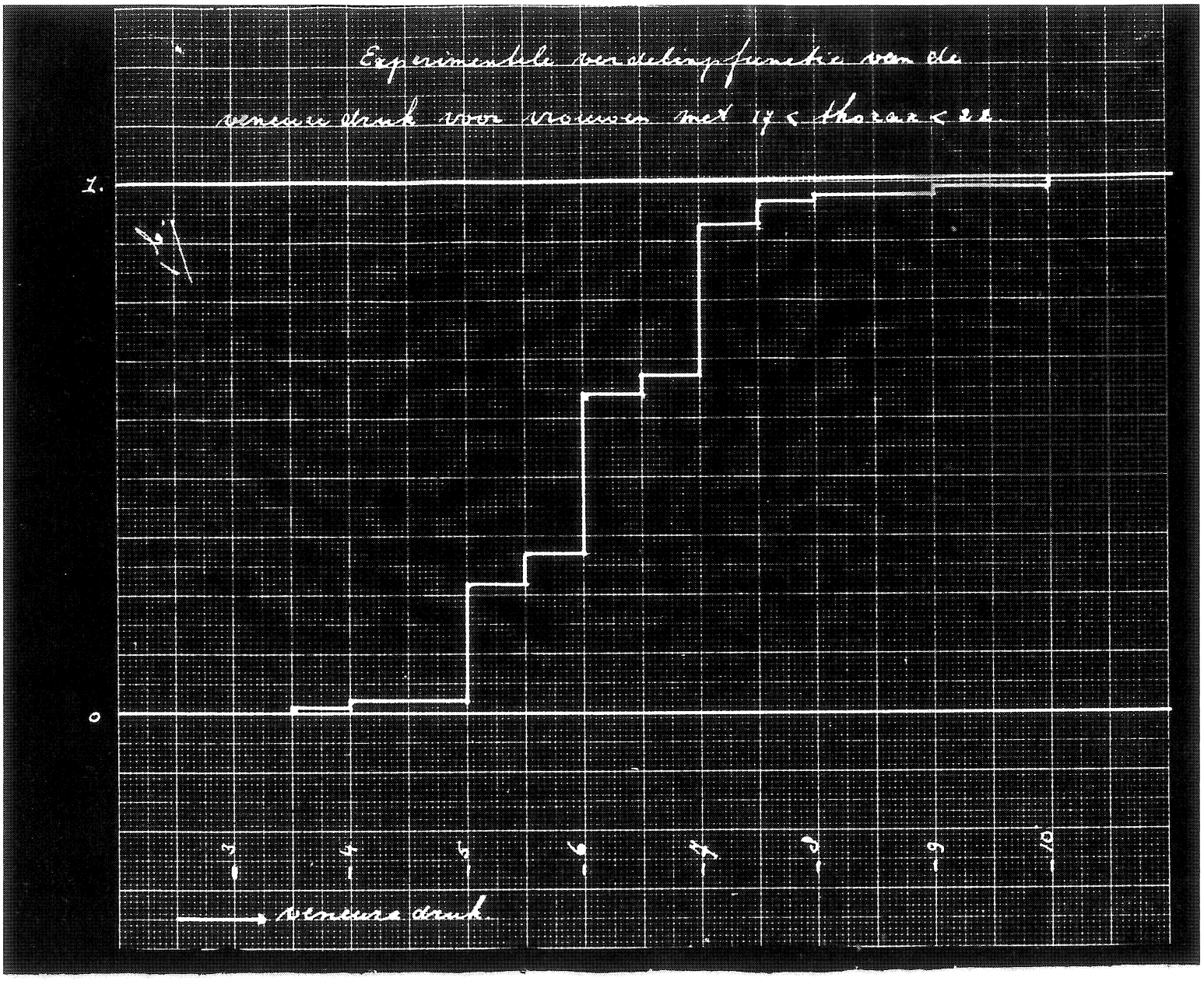
Vrouwen.

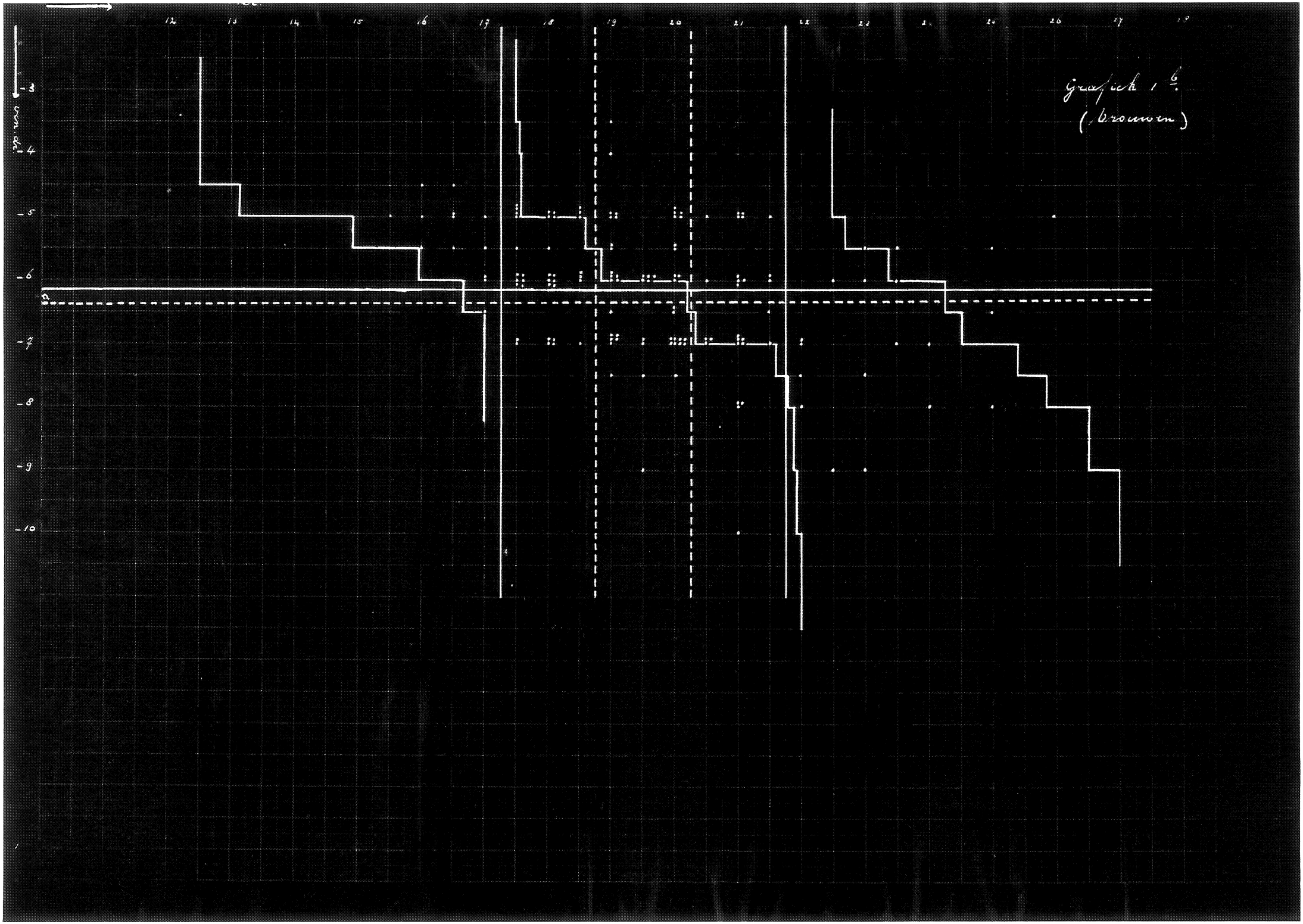
leeftijd	≦19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	≧70
leeftijds-correctie	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1

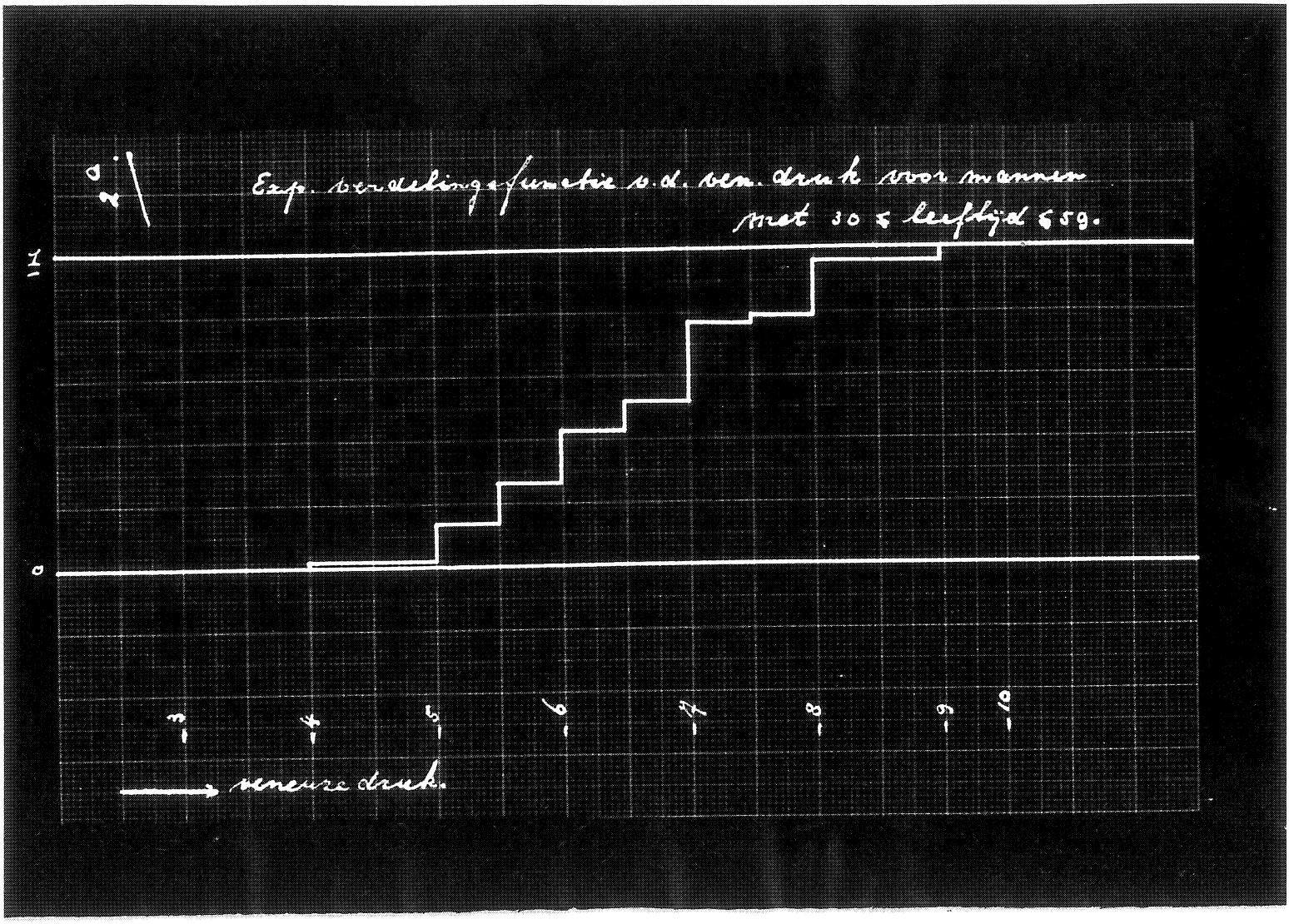
thorax	thorax-correctie	leeftijd ≦19	leeftijd 20-29 … 50-59	leeftijd 60-69 … ≧70
≦17	-1	$-1\frac{1}{2}$	-1	0
17 < th < 22	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
th ≧ 22	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$

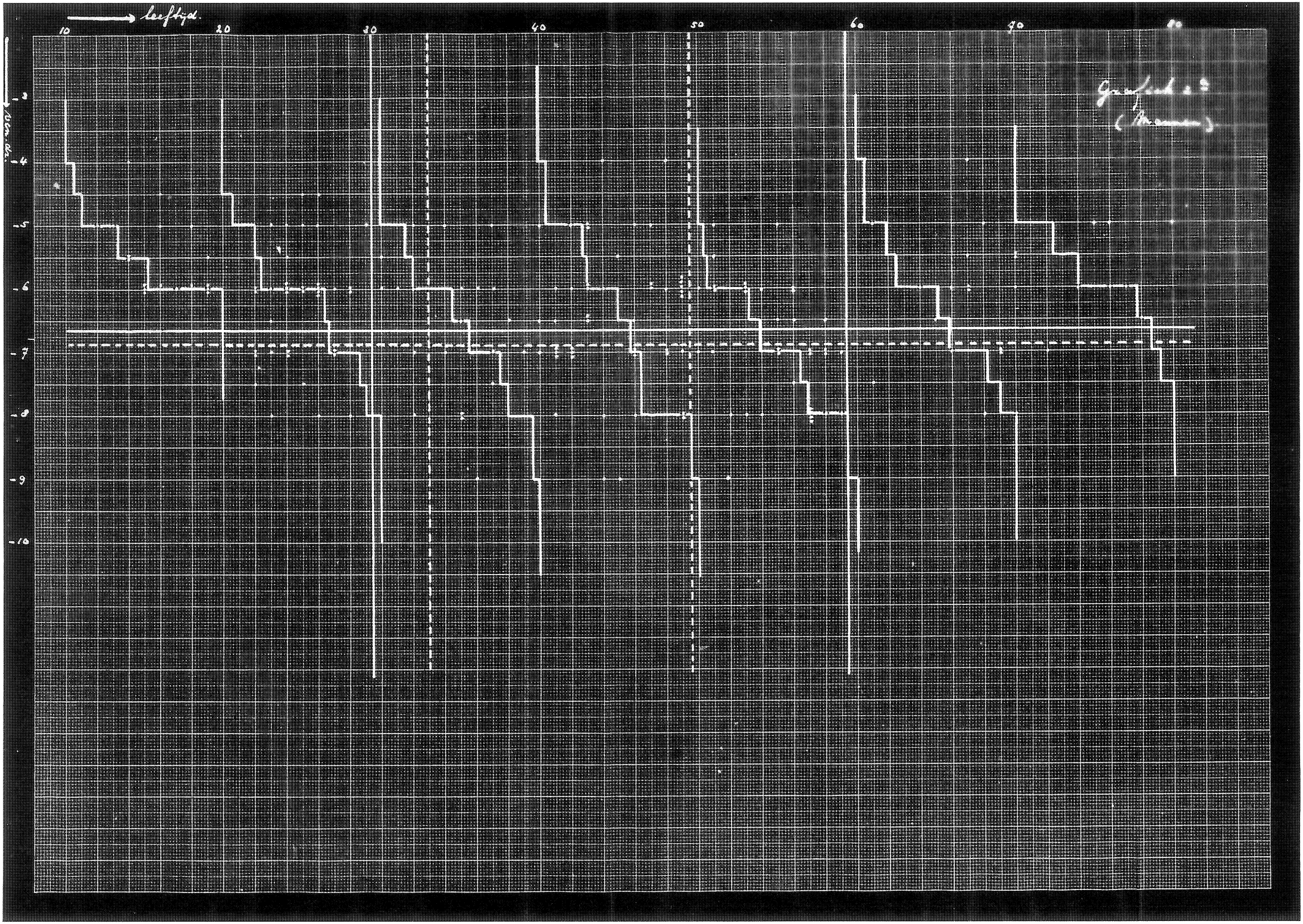
Experimentele verdelingsfunctie voor de nemoure druk
voor mannen met 10 < thorax < 17.

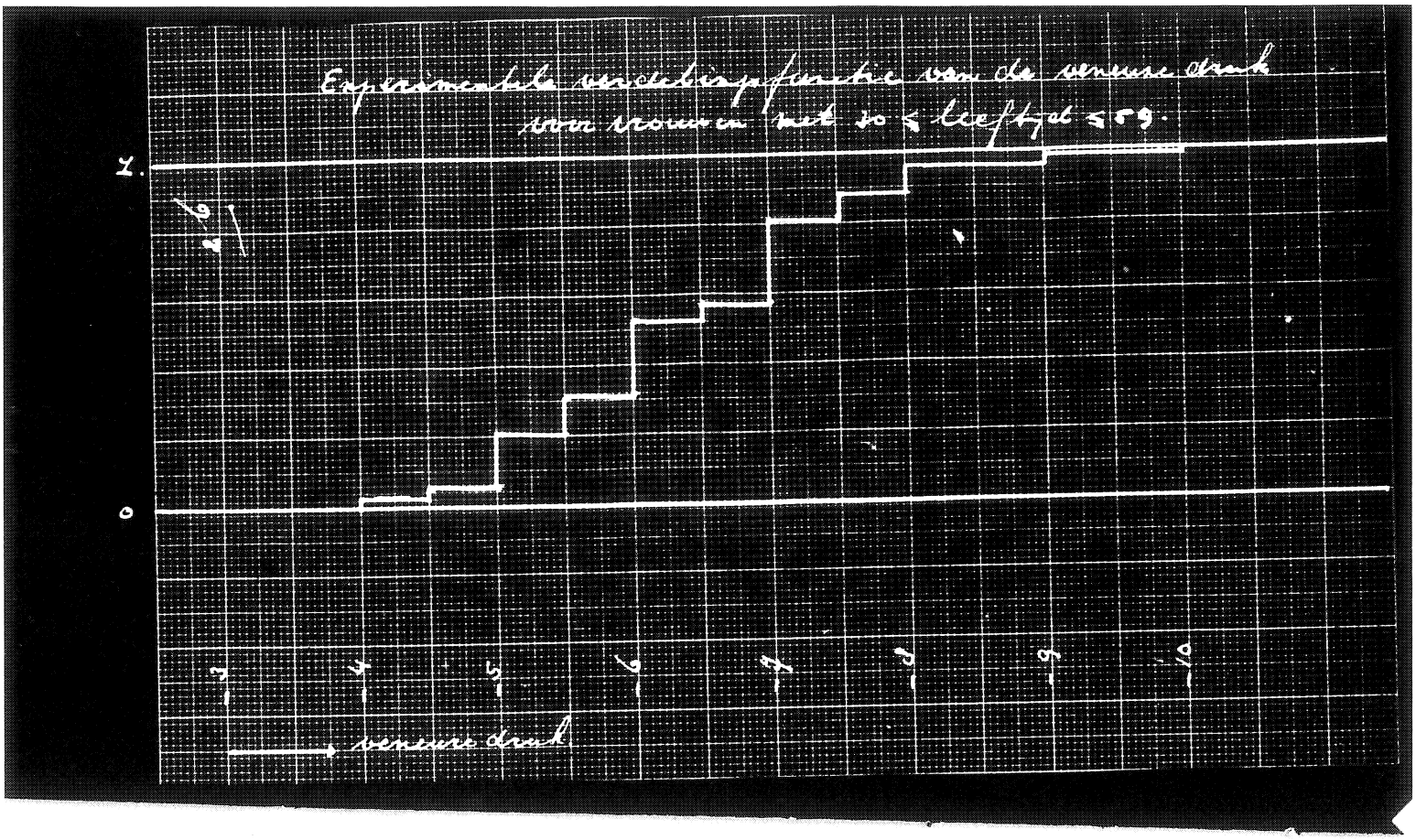

Thoron - diameter.
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
Grafico 1°
(Mannam).

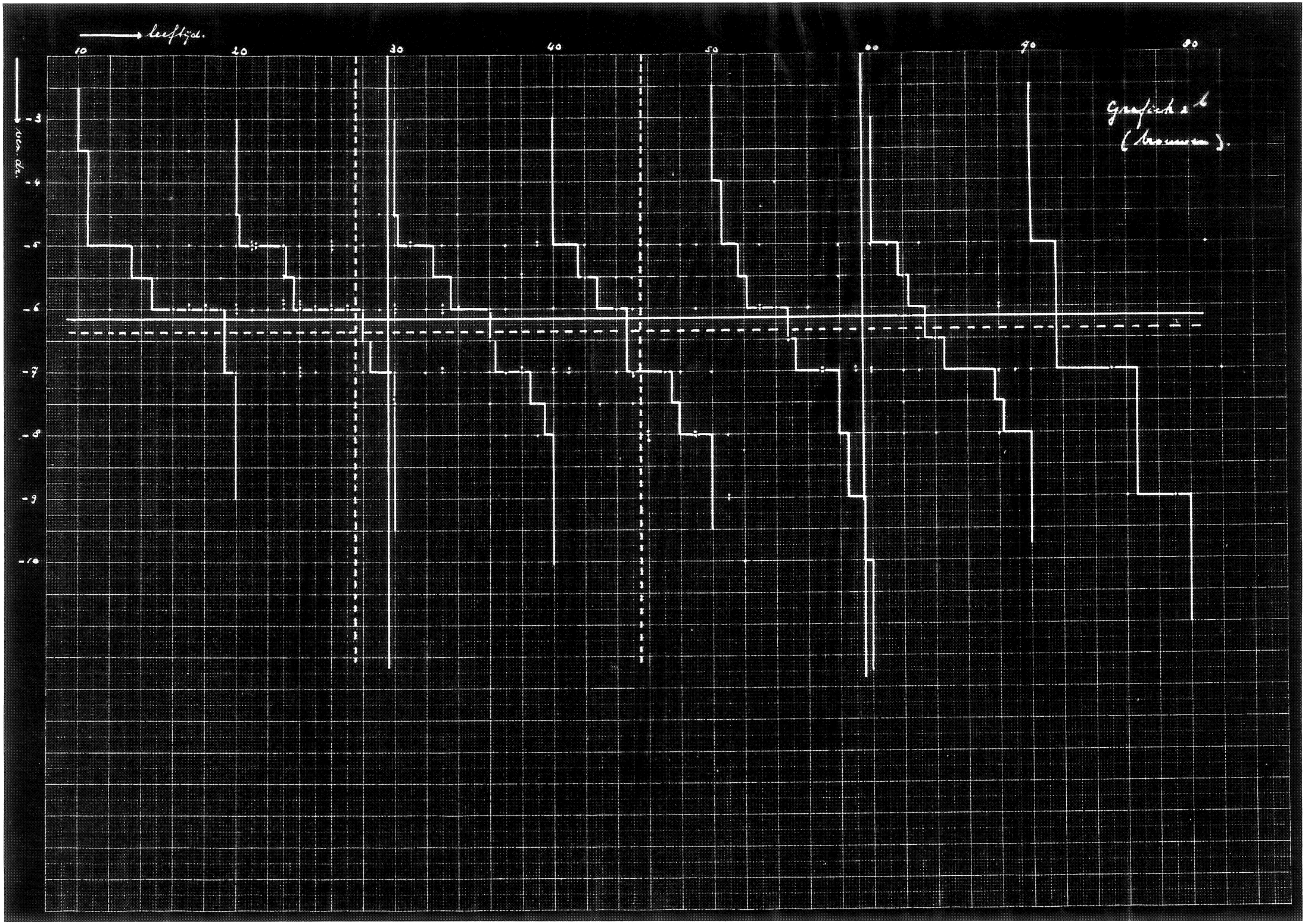

Experimentele overdrukfunctie van de
venneuze druk voor vrouwen met 19 < thorax < 22.
1.
0
3
4
5
6
7
8
9
10
venneuze druk.

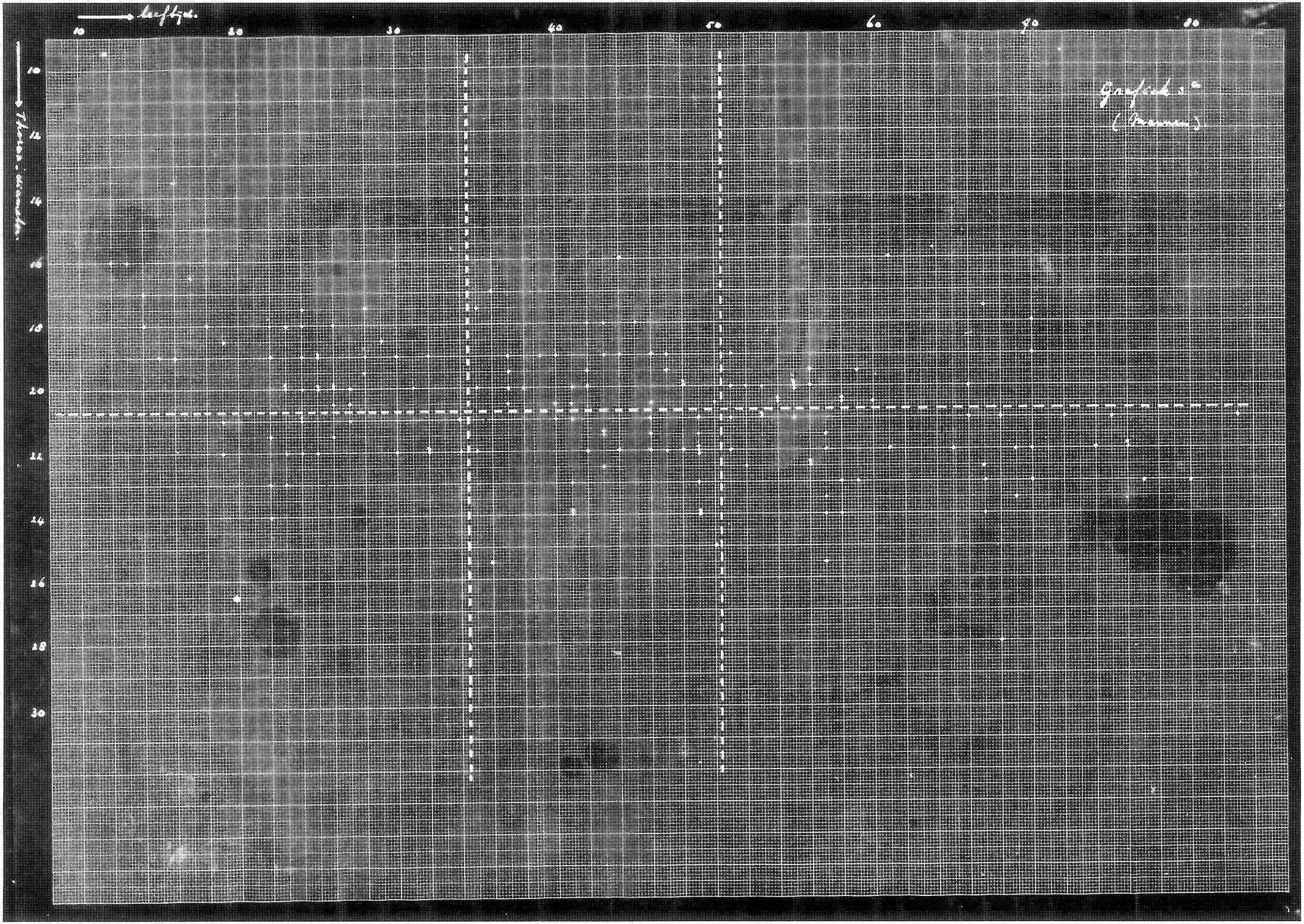

Grafiek 1 b.
(Brouwer)
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
1
2
25
26
27
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10

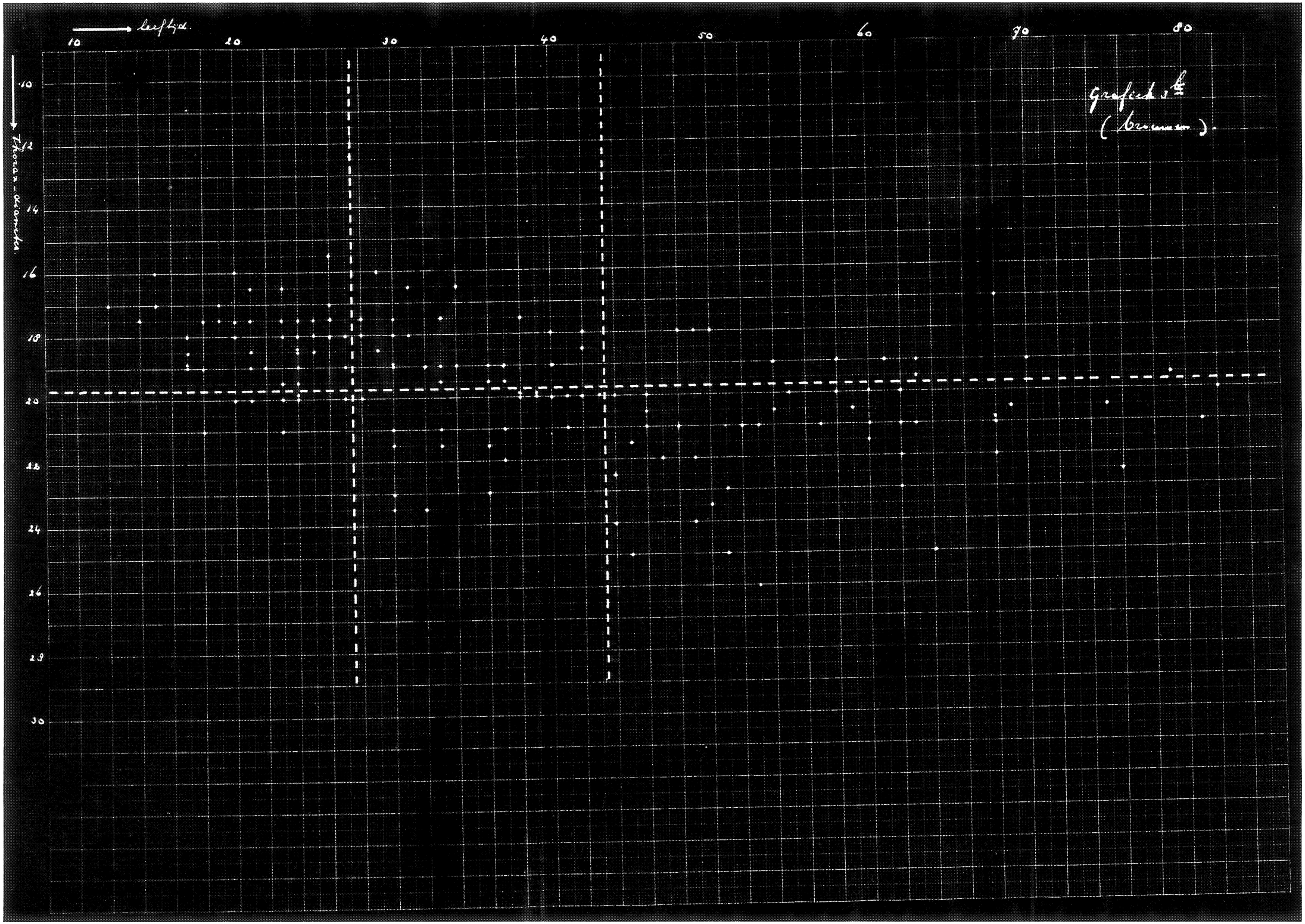

Exp. verdeling-functie v. d. ben. druk voor mannen
met 30 ± leeftijd 659.
11
0
3
4
5
6
7
8
9
10
grenzen druk.


leeftijd
10
20
30
40
50
60
70
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10


Expérience de vérification sur la vraie échelle
Avec accumulateur de 4 litres 500.
4.
0
3
4
5
6
7
8
9
10
Hauteur d'eau


leeftijd.
10
20
30
40
50
60
70
80
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
Grafiek 2
(Brommer).


Graph 1
(Pressure)

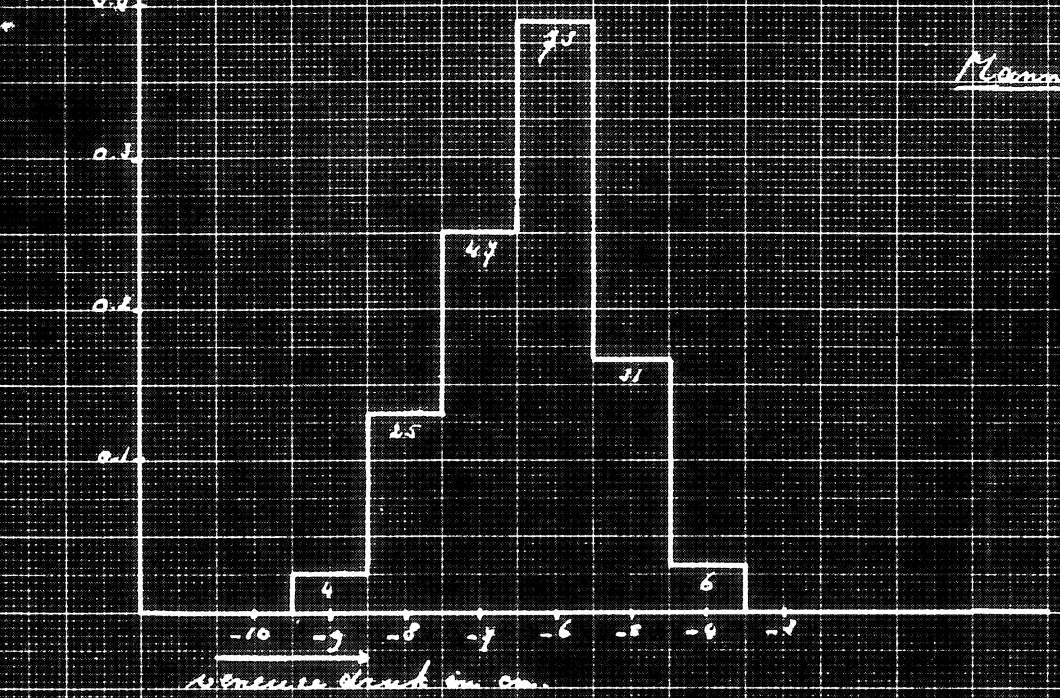

leeftijd.
10
20
30
40
50
60
70
80
Thorax-diameter.
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
Grafiek 3e
(bruinen).

Grafiek 4a

frequentie-quotiënt

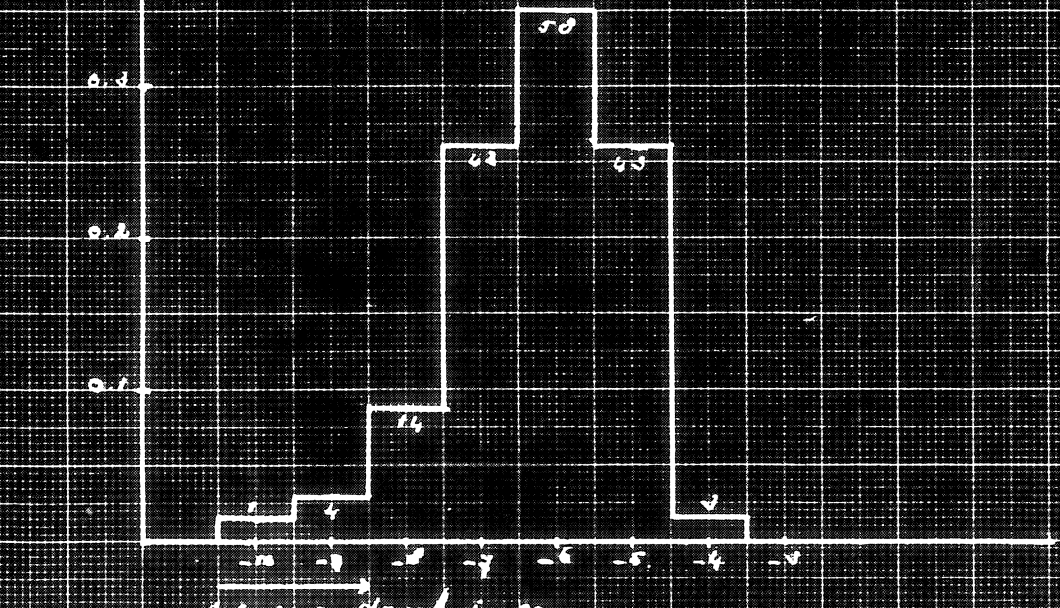
Histogram van de wervende druk voor het ongeoefende materiaal

Mannen



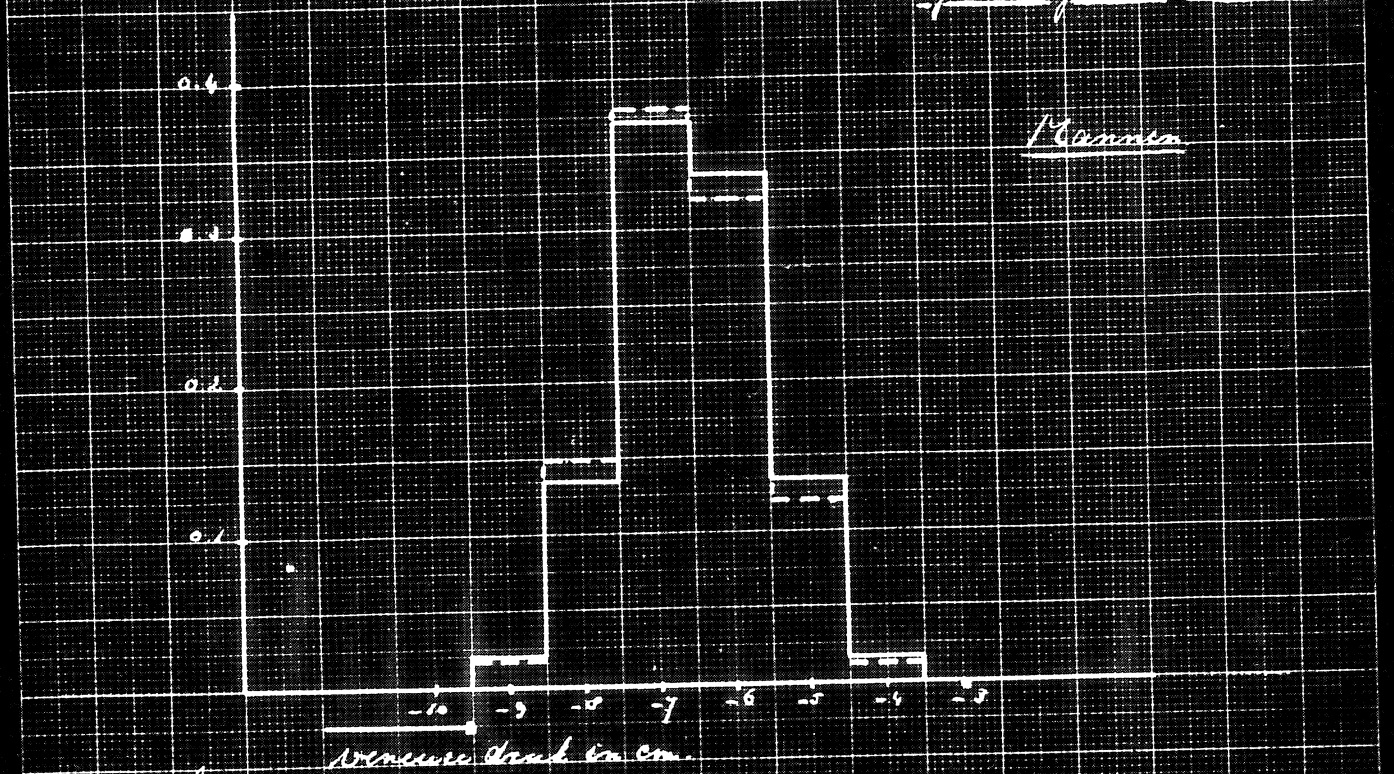
frequentie-quotiënt.

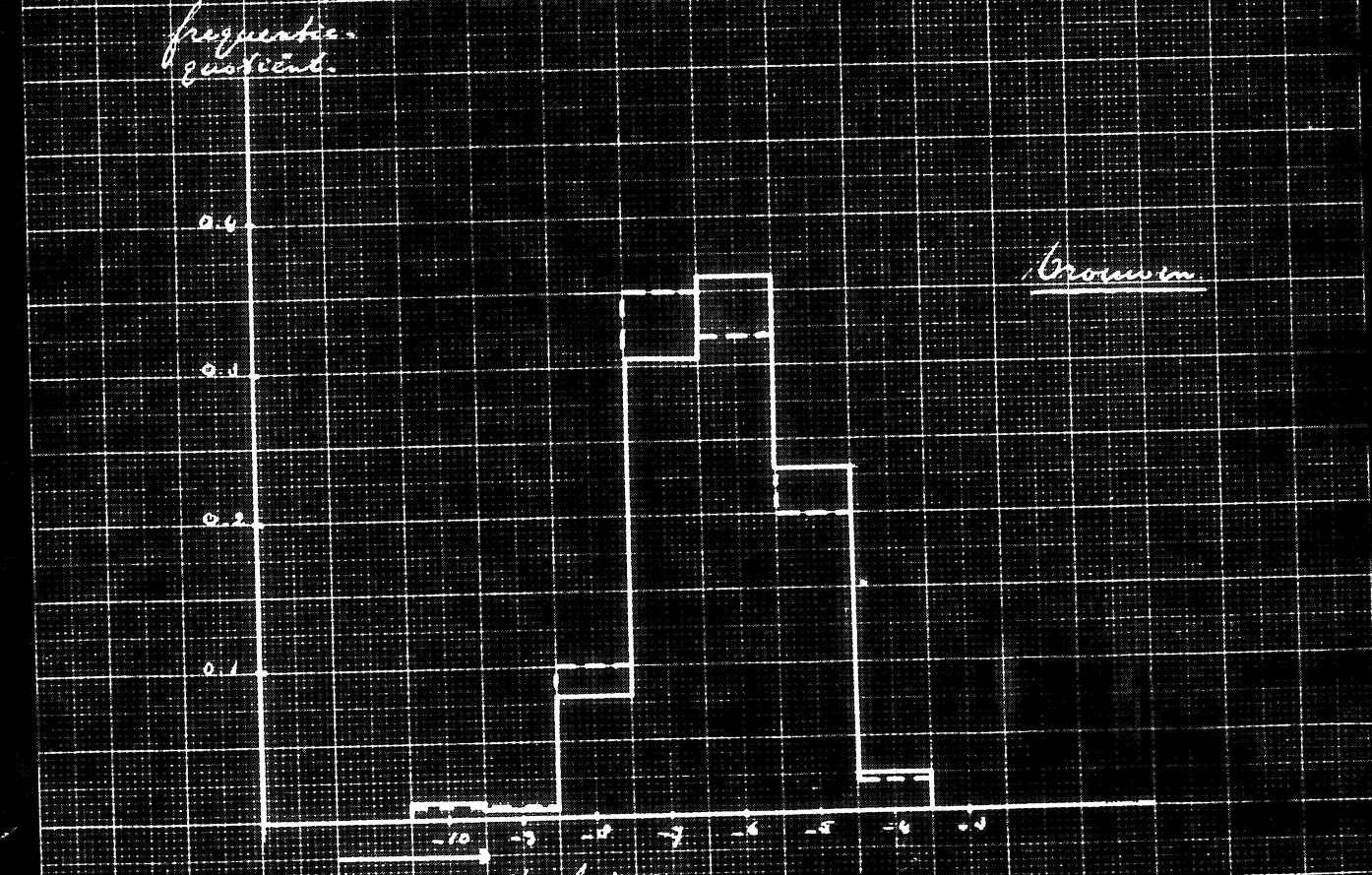
Vrouwen.



Grafiek 4

Histogrammen van de veneuze druk voor het voorafgaande materiaal





Na correctie m.b.v. glaasje 1.

Na correctie m.b.v. tabel 3.

MATHEMATISCH CENTRUM
Amsterdam
Statistische Afdeling.

S47(M6)

Algemene gang van zaken bij het toetsen van een hypothese. [1]

De toetsing van een hypothese H_0 berust steeds op een aantal waarnemingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ van één of meer stochastische grootheden[2], of op enige groepen van waarnemingen (bv. twee steekproeven).

Bij een toets behoort een toetsingsgrootheid u (soms meer dan één), die een functie is van bovengenoemde stochastische grootheden en die, voor de waargenomen waarden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ een waarde aanneemt, die berekend kan worden (bv.: het gemiddelde der waarnemingen, of de spreiding, of het verschil van de gemiddelden van twee waarnemingen).

De toetsingsgrootheid wordt steeds zo gekozen, dat men, op grond van de onderstelling, dat H_0 juist is, de waarschijnlijkheidsverdeling van deze grootheid kan berekenen.

Vervolgens kiest men een verzameling Z van mogelijke uitkomsten van u, en wel op zodanige wijze, dat de kans, dat u een in Z gelegen waarde aanneemt, onder de hypothese H_0, gelijk is aan een gegeven getal α, zodat Z dus van α afhankelijk is[3]. Z heet de kritieke zône van de toets, α de onbetrouwbaarheidsdrempel (Engels: level of significance). Voor α neemt men veelal de waarde 0,05 of 0,01.

Men verwerpt nu H_0 op grond van de waarnemingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, indien de bij deze waarnemingen behorende waarde van u in Z ligt. Dit wordt vaak uitgedrukt door te zeggen, dat het resultaat van het experiment "significant" is. De waarde van α moet dan echter worden vermeld. De kans, dat dit zal gebeuren, is, indien H_0 juist is, gelijk aan α. Derhalve is α de kans op ten onrechte verwerping van de juiste hypothese, ook de kans op een fout van de eerste soort genoemd. Indien men deze methode toepast, met α = 0,05 resp. 0,01, zal men in gemiddeld ongeveer één op 20 resp. op 100 van de gevallen, waarin de hypothese die men toetst juist is, deze toch verwerpen.

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

2) Een stochastische grootheid is een grootheid, die een waarschijnlijkheidsverdeling bezit, of, anders gezegd, een grootheid, die voor de elementen van een collectie(universum,populatie) gedefinieerd is en daarop allerlei waarden aanneemt. Stochastische grootheden worden aangegeven door onderstreepte letters.

3) Soms kan men slechts bereiken, dat deze kans $\leq \alpha$ is.

De toetsingstheorie biedt in het algemeen geen mogelijkheid om tot aanvaarding van een hypothese te komen. Indien een bepaalde hypothese H_0 niet verworpen kan worden, is dit gewoonlijk met een hele verzameling van hypothesen tegelijk het geval. Niet-verwerpen staat dus niet gelijk met aanvaarden.

Wel zal men vaak in de loop van een statistische analyse bepaalde onderstellingen, die plausibel schijnen en voor de verdere analyse van nut zijn, toetsen, alvorens ze bij de verdere bewerking van het materiaal te gebruiken. Worden zij dan op grond van de toets niet verworpen, dan houdt dit in zo verre een rechtvaardiging van die onderstellingen in, dat een grote afwijking door de toets veelal wel zou zijn ontdekt. Indien men dan verder de onderstellingen gebruikt, verwaarloost men eventueel aanwezige afwijkingen van onbekende grootte, die echter niet zo groot zijn, dat zij door de toets zijn ontdekt.

Vele toetsen gelden zelf alleen onder bepaalde onderstellingen omtrent de waarschijnlijkheidsverdelingen der stochastische grootheden, waarvan waarnemingen zijn verricht. Deze nevenvoorwaarden dienen steeds uitdrukkelijk te worden vermeld en, zo mogelijk, zelf te worden getoetst.

In plaats van de onbetrouwbaarheidsdrempel α wordt vaak bij de uitslag van een toetsing de overschrijdingskans k opgegeven; dit is de kleinste waarde van α, waarbij in het betrokken geval, nog tot verwerping van H_0 zou zijn overgegaan; anders gezegd: de kleinste α, waarvoor de gevonden waarde der toetsingsgrootheid nog juist in de (bij α behorende) kritieke zône Z ligt. Wordt dus de waarde k opgegeven en werkt men met onbetrouwbaarheidsdrempel α, dan wordt verworpen, indien $k \leq \alpha$ is.

Voor het onderscheid tussen één- en tweezijdige toetsing en de keuze tussen deze twee mogelijkheden vergelijke men bv. de tweede hieronder gegeven litteratuurplaats. Wij moeten hier volstaan met de opmerking, dat éénzijdige toetsing veelal eerder tot verwerping van H_0 leidt, maar dat deze slechts onder bijzondere omstandigheden kan worden toegepast.

Litteratuur:

J.Neyman, First course in probability and statistics, New York, 1950, Chapter 5.

J.Hemelrijk en H.R. van der Vaart, Het gebruik van één- en tweezijdige overschrijdingskansen voor het toetsen van hypothesen, Statistica 4 (1950) p.54-66.

MATHEMATISCH CENTRUM
2de Boerhaavestr. 49
A M S T E R D A M O.
Statistische Afdeling.

Rapport S53 (M 15a)

De χ^2-toets voor onafhankelijkheid van 2 grootheden.[1)]

De χ^2-toets voor de hypothese H_o van onafhankelijkheid van 2 grootheden x en y kan beschouwd worden als een uitbreiding van de in het Memorandum S47 (M15) beschreven methode der Dubbele Dichotomie voor het toetsen van dezelfde hypothese.

Bij deze laatste toetsingsmethode wordt de puntenwolk van de waarnemingen $(x_1,y_1),\ldots,(x_N,y_N)$ door één horizontale en één verticale lijn in 4 groepen verdeeld. Deze twee lijnen worden zodanig getrokken, dat de verschillen tussen de aantallen punten boven en beneden de horizontale lijn, resp. links en rechts van de verticale lijn, zo klein mogelijk zijn.

De χ^2-toets voor onafhankelijkheid is een uitbreiding van de toetsingsmethode der Dubbele Dichotomie, in die zin, dat i.p.v. één horizontale en één verticale lijn, verschillende horizontale en verticale lijnen getrokken worden, zodanig dat in alle verticale stroken, voor zover mogelijk, evenveel punten liggen en eveneens in alle horizontale stroken.

Zijn de aantallen horizontale lijnen en verticale lijnen, die getrokken worden, resp. r-1 en s-1, dan kiezen wij r en s zodanig, dat $\frac{N}{r.s} \geq 10$ is en zo mogelijk in de buurt van 20 ligt. Hierbij is N het totale aantal waarnemingen. Wanneer n.l. r-1 horizontale en s-1 verticale lijnen getrokken worden op boven beschreven wijze, is, onder de hypothese H_o, de verwachting van de aantallen punten in ieder van de r s door de verticale en horizontale lijnen bepaalde vakken, ongeveer gelijk aan $\frac{N}{rs}$. Voor toepassing van de χ^2-toets is het noodzakelijk, dat deze aantallen ≥ 10 zijn.

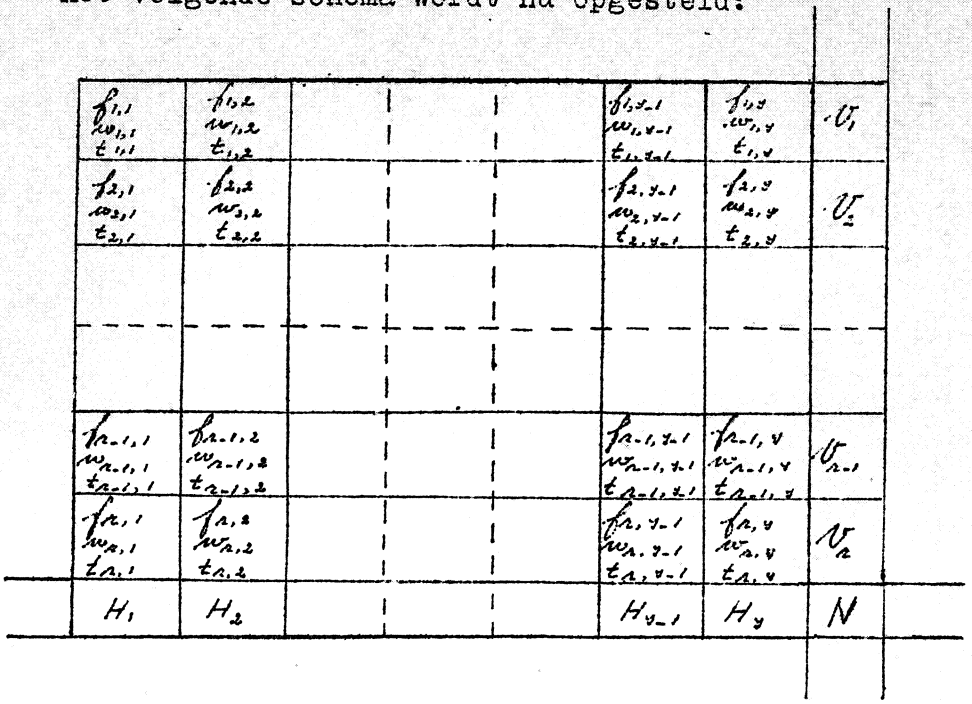
In het algemeen worden r en s ongeveer even groot gekozen, terwijl de keuze soms, door de aard van het speciale onderzoek bepaald wordt.

---

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntering en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

Uit het bovenstaande blijkt, dat de χ^2-toets voor onafhankelijkheid alleen gebruikt kan worden voor een groot aantal waarnemingen. Wanneer het aantal klein is, kan men beter de exacte toetsingsmethode der Dubbele Dichotomie toepassen. (Zie hiertoe Memorandum S47 (M15)).

Nadat de horizontale en verticale lijnen aangebracht zijn, worden de aantallen punten in de rs vakken geteld. Stel deze aantallen zijn $f_{1,1}, f_{1,2}, \ldots, f_{r,s}$. Het volgende schema wordt nu opgesteld:



In bovenstaand schema zijn $H_1, H_2, \ldots, H_s$, $V_1, V_2, \ldots, V_r$ de zgn. "randtotalen", N is het totale aantal waarnemingen.

Wanneer x en y werkelijk twee onafhankelijke grootheden zijn, dan bezitten bij gegeven randtotalen de waarden f_{ij} als verwachting de waarden:

$$w_{ij} = \frac{H_i V_j}{N}, \quad 1 \leqq i \leqq r, \quad 1 \leqq j \leqq s.$$

Deze waarden $w_{i,j}$ zijn dus uit de gegeven randtotalen te berekenen en worden in het schema ingevuld. Daarna wordt voor ieder der rs vlakken de waarde

$t_{ij} = \frac{(f_{ij} - w_{i,j})^2}{w_{i,j}}$ bepaald en weer in het schema ingevuld.

Als toetsingsgrootheid bij deze toets wordt de grootheid χ^2 gebruikt, met

$$\chi^2 = (t_{1,1} + \cdots + t_{1,s}) + (t_{2,1} + \cdots + t_{2,s}) + \cdots + (t_{r,1} + \cdots + t_{r,s}) = \sum_{i,j} t_{ij}$$

welke onder de hypothese H_0 een χ^2-verdeling bezit, met (r-1)(s-1) vrijheidsgraden.(d.i. het aantal f's dat vrij gevariëerd kan worden, zonder de randtotalen te wijzigen).

Voor deze χ^2-verdeling bestaan tabellen en nomogrammen, die men in vrijwel ieder statistisch leerboek kan vinden.

Grote waarden van χ^2 wijzen op grote verschillen tussen de gevonden aantallen $f_{i,j}$ en hun verwachtingen $w_{i,j}$, berekend in de onderstelling, dat H_o juist is. We verwerpen daarom de hypothese H_o indien

$$\chi^2 \geqq \chi_\alpha^2$$

is, waarbij χ_α^2 de waarde van χ^2 is, waarvoor

$$P\left[\chi^2 \geqq \chi_\alpha^2\right] = \alpha$$

Hierin is α de onbetrouwbaarheidsdrempel. De hypothese H_o zal dan gemiddeld in een fractie α van die gevallen, waarin H_o juist is, ten onrechte verworpen worden.

De waarde χ_α^2, waarvoor bovenstaande betrekking geldt, kan gemakkelijk uit de tabellen of nomogrammen van de χ^2-verdeling bepaald worden.

Litteratuur:

M.G.Kendall, The advanced Theory of Statistics, Volume I (London 1947).

A.M.Mood, Introduction to the Theory of Statistics (London 1950).

R.A.Fisher and F.Yates, Statistical Tables, (London 1949).

MATHEMATISCH CENTRUM
2de Boerhaavestr. 49
A M S T E R D A M O.
Statistische Afdeling
S53 (M20)

De χ^2- toets (Algemeen).*)

Wij beschouwen een experiment, dat als resultaat één van de, elkaar uitsluitende, uitkomsten

(1) $A_1, A_2, \ldots, A_k$

heeft. De χ^2- toets stelt ons in staat om, op grond van de resultaten van een aantal onafhankelijke uitvoeringen van het experiment, de hypothese H_0 te toetsen, dat de kansen op de uitkomsten $A_1, \ldots, A_k$ gelijk zijn aan gegeven getallen

(2) $p_1, p_2, \ldots, p_k,$

waarbij $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$ is. Deze voorwaarde is noodzakelijk, daar de uitkomsten elkaar uitsluiten, maar één van alle moeten optreden.

Indien H_0 juist is en er n waarnemingen worden verricht, is de mathematische verwachting van de aantallen malen, dat $A_1, \ldots, A_k$ hierbij zullen optreden:

(3) $np_1, np_2, \ldots, np_k.$

Worden in werkelijkheid de frequenties

(4) $n_1, n_2, \ldots, n_k$

gevonden, dan zal men, indien de rijen (3) en (4) goed overeenstemmen de hypothese H_0 niet verwerpen, maar indien zij slecht overeenstemmen wel. Als maat voor de overeenstemming van de twee rijen neemt men nu de grootheid χ^2, die gedefinieerd is als:

$$(5)\quad \chi^2 = \frac{(n_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(n_2 - np_2)^2}{np_2} + \ldots + \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$$

Bij goede overeenstemming van (3) en (4) is χ^2 klein (bij volledige overeenstemming zelfs 0) en bij slechte overeenstemming is χ^2 groot.
De waarschijnlijkheidsverdeling van χ^2, onder aanname van de hypothese H_0, is voor voldoende grote n bij benadering bekend en getabelleerd.
Deze waarschijnlijkheidsverdeling hangt van k af: $\nu = k - 1$ wordt het aantal graden van vrijheid genoemd. De benadering

*) Dit memorandum is slechts bedoeld ter orientatie en streeft niet naar volledigheid of exactheid

is voldoende nauwkeurig, indien voor iedere i geldt:

(6) $np_i > 10.$ $\qquad i = 1,\ldots, k.$

Indien hieraan niet voldaan is, neemt men kenmerken, waarvoor $np_i < 10$ is, tezamen tot nieuwe kenmerken, totdat wel aan (6) voldaan is. (NB: hierdoor vermindert dan de waarde van k, dus het aantal vrijheidsgraden wordt kleiner).

Als kritieke zône wordt, bij gebruik van de onbetrouwbaarheidsdrempel α, het gebied

(7) $\chi^2 \geq \left\{\chi_0(\alpha,\nu)\right\}^2$ genomen,

waarbij $\chi_0(\alpha,\nu)$ zo gekozen is, dat, onder hypothese H_0, de kans, dat (7) vervuld is, gelijk aan α is.

Litteratuur:

M.G. Kendall, The advanced Theory of Statistics, I, 1947, Chapter 12.

Tabellen en nomogrammen:

M.G. Kendall, ibidem, p. 444 - 446,

H. Cramér, Mathematical Methods of Statistics, 1946, p.559,

Statistica 1 (1946), p. 109.